

一种火星大气密度三维解析模型

秦同^{1,2}, 王硕^{1,2}, 高艾^{1,2}, 朱圣英^{1,2}, 崔平远^{1,2}

(1. 北京理工大学深空探测技术研究所, 北京 100081; 2. 飞行器动力学与控制教育部重点实验室, 北京 100081)

摘要: 根据火星大气数据库, 建立了以高度和经纬度为输入的火星三维解析大气密度模型; 在竖直方向上, 采用分层指数模型; 在水平方向上, 将指数模型中的参考密度和参考高度视为经纬度的多项式函数, 并通过最小二乘曲面拟合得到了多项式系数。相比传统的指数模型, 三维指数模型不仅反映了火星大气密度随高度的变化规律, 而且能够体现出大气密度在水平方向上的变化。与大气数据库相比, 三维密度模型具有解析形式, 计算速度快, 仿真过程中只需存储简单的多项式系数即可实现密度的实时计算和调用, 适用于地面实时仿真。

关键词: 火星大气密度; 三维解析模型; 分层指数模型; 多项式曲面拟合

中图分类号: P185.3 **文献标识码:** A **文章编号:** 2095-7777(2014)02-0117-06

Three-Dimensional Analytical Model for Mars Atmospheric Density

QIN Tong^{1,2}, WANG Shuo^{1,2}, GAO Ai^{1,2}, ZHU Shengying^{1,2}, CUI Pingyuan^{1,2}

(1. Institute of Deep Space Exploration Technology, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China;

2. Key Laboratory of Dynamics and Control of Flight Vehicle, Ministry of Education, Beijing 100081, China)

Abstract: This paper utilizes the data from the Mars atmosphere database and establishes a three-dimensional analytical atmospheric density model of Mars with the altitude, longitude and latitude as its input. The layered exponential model is adopted vertically. At horizontal direction, the reference density and reference altitude are assumed to be polynomial functions of longitude and latitude. The coefficients of the polynomial are obtained by surface fitting which is based on the method of least squares. Compared with the traditional exponential density model, the 3-D model proposed in this paper expresses the variation of density with not only altitude but also longitude and latitude. Compared with the Mars atmosphere data, the 3-D model has an analytical formulation and requires less calculation time. As long as the polynomial coefficients are stored in simulation, the real-time calculation and calling of the atmospheric density can be achieved, which applies to the ground real-time simulation.

Key words: Mars atmospheric density; 3-D analytical model; layered exponential model; polynomial surface fitting

0 引言

火星大气密度是火星着陆过程的重要环境参数, 是火星着陆系统设计与着陆过程仿真的主要大气参数, 尤其在进入段, 大气密度会影响气动力, 进而关系到动力学模型的精确性。建立火星大气密度模型, 用于地面仿真验证, 对着陆任务的成功至关重要。现有的火星大气模型主要包括两类, 火星大气

数据库和火星大气简化模型。火星大气数据库是基于火星大气环流模型和实际任务数据构建而成, 包含了丰富的数据信息, 适用于系统设计、性能分析等任务。火星大气简化模型是利用数据库的数据通过曲线拟合得到的指数模型, 包含的大气信息较为单一, 但使用过程中计算量小、速度快, 适用于实时仿真。

火星大气数据库主要有 NASA 的火星全球参

考大气模型 (Mars Global Reference Atmospheric Model, Mars-GRAM)^[1-2] 和欧洲的火星气候数据库 (Mars Climate Database, MCD)^[3-4]。Mars-GRAM 由马歇尔太空飞行中心的自然环境部门研发,已广泛应用于多个任务。该数据库 0~80 km 高度范围内的数据是基于 NASA 埃姆斯火星大气环流模型 (Ames Mars General Circulation Model, AMGCM)^[5] 计算得到的,高于 80 km 的数据则基于火星热层大气环流模型 (Mars Thermosphere General Circulation Model, MTGCM)^[6] 计算得到。其最新版本是 Mars-GRAM 2010。欧洲的火星气候数据库的主要研发部门是法国的动力气象实验室,该项目同时受到欧空局和法国国家研究中心的支持,并作为欧空局火星环境模型的组成部分,得到了广泛应用。其数据是基于全球气候环流模型 (General Circulation Model, GCM) 仿真得到的,并经过“海盗号”和后续多个火星任务的观测数据验证。最新版本为 MCD 5.0。MCD 数据库包含了一系列大气静态参数 (温度、密度、气压等),且其中的数据已经与实际任务观测数据进行了对比,其有效性得以验证^[7],部分数据也得以修正。Justus 等 (2006)^[8] 和 Mooij (2006) 等^[9] 将 MCD 数据库和 Mars-GRAM 数据库的密度数据与火星全球勘测者的观测数据作了对比分析,发现数据库与实测数据的差值在 10% 以内。Mars-GRAM 和 MCD 包含了大气密度、温度、压强等多项大气参数,是目前能够比较精确全面地反映火星大气特性的数据库。然而由于数据庞大,调用过程繁琐,耗时长,因此此类数据库不适用于实时仿真。

实时仿真中常用的火星大气简化模型有 5 种^[10-13],如表 1 所示。模型多为大气密度随海拔高度变化的一维指数模型或分层指数模型,以及气温、压强、密度随高度变化的模型,由实际任务数据或火星大气数据库提供的数据拟合得到。然而,火星表面的地形起伏会对大气运动造成一定的影响,不同区域同一高度的大气密度也有较大差别。因此,火星大气密度不仅仅与高度有关,还与经纬度有密切关系。表 1 中所列简化模型,虽然形式简单,但未体现出密度在水平层面上的变化,因此精度较低。

本文利用火星大气数据库的数据^[14],通过数据拟合的方法得到了以高度和经纬度为输入的三维解析火星大气密度模型。根据大气数据库的密度数据可知,大气密度在高度层上并非是严格的指数形

式,而是在一定的高度范围内呈现出明显的指数变化规律,因此三维密度模型在高度层上采用分层指数模型,将 0~147 km 划分为五层,每层的高度分别为:0~50 km、50~80 km、80~110 km、110~130 km、130~147 km,此处的高度是指高于火星参考半径 (3 370 km) 的高度。分层的目的是使得每一层的大气密度随高度的变化呈现出严格的指数规律,以提高拟合精度。同时,将指数函数中的参考密度和参考高度视为经纬度的多项式函数,通过最小二乘法拟合得到多项式的系数,以此将经纬度信息引入到密度模型中。相比传统的指数模型,三维指数模型具有更高的精度。与气候数据库相比,三维指数模型具有解析表达式,计算速度快,仿真过程中只需存储简单的多项式系数即可实现密度的实时计算和调用,适用于地面实时仿真验证。

表 1 火星大气简化模型

Table 1 The simplified Mars atmosphere models

编号	模型表达式	参数:参考大气密度 参考高度	来源
1	$\rho_h = \rho_0 e^{-h/h_s}$	$\rho_0 = 1.474 \times 10^{-2} \text{ kg/m}^3$, $h_s = 8\ 805.7 \text{ m}$	“海盗号”观测数据,1976
2	$\rho_h = \rho_0 e^{-h/h_s}$	$\rho_0 = 1.58 \times 10^{-2} \text{ kg/m}^3$, $h_s = 9\ 354.5 \text{ m}$	Joel Benito2008
3	$\rho_h = \rho_0 e^{-(h-h_0)/h_s}$	$\rho_0 = 2 \times 10^{-4} \text{ kg/m}^3$, $h_0 = 40\ 000 \text{ m}, h_s = 7\ 500 \text{ m}$	法国国家太空研究中心
4		$T = 1.4 \times 10^{-13} h - 8.85 \times 10^{-9} h^2 - 1.245 \times 10^{-3} h + 205.364\ 5$, $p = 559.351\ 005\ 946\ 503 e^{-0.000\ 105h}$, $\rho = p/188.951\ 107\ 110\ 75\ T$	Mars-GRAM 数据拟合
5		当 $h < 7\ 000 \text{ m}$ 时, $T = 241.0 - 0.999(h/1\ 000)$ $P = 700 \exp[-0.09(h/1\ 000)]$ $\rho = P/188.951\ 107\ 110\ 75\ T$ 当 $h \geq 7\ 000 \text{ m}$ 时, $T = 249.5 - 2.22(h/1\ 000)$ $P = 700 \exp[-0.09(h/1\ 000)]$ $\rho = P/188.951\ 107\ 110\ 75\ T$	Mars-GRAM 数据拟合 日本大学 Ushijima 2010

1 三维大气密度模型的建立

建立三维大气密度模型首先需要获取三维空间上的密度数据。在高度层上,将高于火星参考半径 0~147 km 的高度按照 1 km 的间隔均匀划分;在水平层上,将经纬度按照 2° 的间隔划分网格,通过已公开的大气数据库^[14],可得到三维空间节点上的密度数值。在垂直方向上,用分层指数模型拟合大气密度,如式(1)所示

$$\rho(\theta, \varphi, h) = \sum_{i=1}^5 C_i \rho_{ir}(\theta, \varphi) e^{-\frac{h}{h_{is}(\theta, \varphi)}} \quad (1)$$

式中, θ 为经度; φ 为纬度; $\rho_{ir}(\theta, \varphi)$ 为第 i 层的参考密度; $h_{is}(\theta, \varphi)$ 为第 i 层的参考高度; C_i 为第 i 层的指示系数, 当高度处于第 i 层时, C_i 取 1, 否则 C_i 取为 0。第 1 层到第 5 层的高度分别为: 0~50 km, 50~80 km, 80~110 km, 110~130 km, 130~147 km。由于在高度上划分了 5 层, 因此对于每一个经纬度节点都对应 5 个参考高度和参考密度, 本文采用 Matlab 优化工具箱中的非线性拟合函数 lsqcurvefit 计算得到了每一个高度层的参考高度和参考密度。对于每一个高度层, 由于在水平方向上也经纬度划分了网格, 因此, 同样需要通过曲线拟合得到每个经纬度节点上的参考高度和参考密度。为了将经纬度作为输入量引入大气密度模型中, 将每一层的 ρ_r 和 h_s 均视为经纬度的多项式函数, 如式(2)和式(3)所示

$$\rho_r(\theta, \varphi) = \sum_{j=0}^m ([\theta^j \quad \theta^{j-1}\varphi \quad \cdots \quad \theta\varphi^{j-1} \quad \varphi^j] \begin{bmatrix} a_{j1} \\ a_{j2} \\ \vdots \\ a_{jj} \\ a_{jj+1} \end{bmatrix}) \quad (2)$$

$$h_s(\theta, \varphi) = \sum_{j=0}^m ([\theta^j \quad \theta^{j-1}\varphi \quad \cdots \quad \theta\varphi^{j-1} \quad \varphi^j] \begin{bmatrix} b_{j1} \\ b_{j2} \\ \vdots \\ b_{jj} \\ b_{jj+1} \end{bmatrix}) \quad (3)$$

式中, m 为多项式的阶次; a 和 b 为多项式的系数。由于每个经纬度节点上的参考密度和参考高度已知, 因此可以通过曲面拟合的思想得到多项式的系数。本文采用最小二乘法进行多项式曲面拟合。将多项式系数视为未知量, 每一个经纬度节点均可得到如式(2)和式(3)所示的方程, 联立所有经纬度点上的方程, 得到矩阵方程式(4)和式(5)

$$\mathbf{L}\mathbf{A} = \mathbf{P} \quad (4)$$

$$\mathbf{L}\mathbf{B} = \mathbf{H} \quad (5)$$

其中,

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & \theta_1\varphi_1 \cdots \theta_1^m & \theta_1^{m-1}\varphi_1 \cdots \theta_1\varphi_1^{m-1} & \varphi_1^m \\ 1 & \theta_2\varphi_2 \cdots \theta_2^m & \theta_2^{m-1}\varphi_2 \cdots \theta_2\varphi_2^{m-1} & \varphi_2^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \theta_n\varphi_n \cdots \theta_n^m & \theta_n^{m-1}\varphi_n \cdots \theta_n\varphi_n^{m-1} & \varphi_n^m \end{bmatrix} \quad (6)$$

为经纬度构成的系数矩阵。

$$\mathbf{A} = [a_{01} \quad a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{m1} \quad a_{m2} \quad \cdots \quad a_{mm} \quad a_{mm+1}]^T \quad (7)$$

为计算参考密度的多项式系数。

$$\mathbf{B} = [b_{01} \quad b_{11} \quad b_{12} \quad \cdots \quad b_{m1} \quad b_{m2} \quad \cdots \quad b_{mm} \quad b_{mm+1}]^T \quad (8)$$

为计算参考高度的多项式系数。

$$\mathbf{P} = [\rho_1 \quad \rho_2 \quad \cdots \quad \rho_n]^T \quad (9)$$

为 n 个经纬度节点上的参考密度。

$$\mathbf{H} = [h_{1r} \quad h_{2r} \quad \cdots \quad h_{nr}]^T \quad (10)$$

为 n 个经纬度节点上的参考高度。

当 A 的行数大于其列数, 即经纬度节点数大于多项式系数的个数时, 便可利用最小二乘法解超定线性方程组, 如式(11)和式(12)所示

$$\mathbf{A} = (\mathbf{L}^T\mathbf{L})^{-1}\mathbf{L}^T\mathbf{P} \quad (11)$$

$$\mathbf{B} = (\mathbf{L}^T\mathbf{L})^{-1}\mathbf{L}^T\mathbf{H} \quad (12)$$

式(4)~(12)给出了一个高度层上拟合参考密度和参考高度的多项式系数的计算过程, 其他高度层的多项式系数计算过程相同。在得到 5 个高度层上的多项式系数后, 式(1)~(3)便构成了以高度和经纬度为输入的三维解析火星大气密度模型。只需事先存储多项式系数, 即可实现大气密度的实时计算与调用。

2 模型分析

相比传统的一维指数模型, 三维密度模型优点在于将经纬度引入了模型, 反映出了密度在水平方向上的变化规律。图 1 给出了依据传统指数模型(表 1 中的模型 1)和三维密度模型计算的美国 7 次火星着陆任务着陆区域密度随高度的变化。

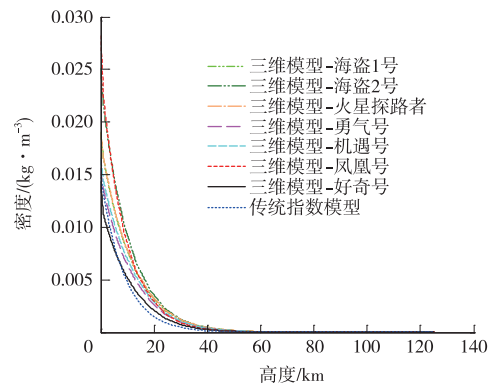


图 1 美国七次火星着陆任务着陆区域密度随高度的变化
Fig. 1 The change of density with height at the landing targets of the American seventh Mars landing missions

从图 1 可以看出, 利用三维密度模型计算的不同着陆区域的密度有较大区别。若采用传统指数模型, 则无法体现密度在不同区域的差异, 在进行地面仿真时会与实际情况出现较大差异, 而采用三维密

度模型则相对准确地反映出密度随着陆区域的变化。

目前对火星大气模型的评估主要以大气数据库和实测数据为基准。为提高多项式拟合精度,同时考虑到计算量的限制,将经纬度按照 2° 的间隔均匀划分网格,并取拟合参考高度和参考密度的多项式阶数为 18 阶。此外,若阶数过高, $L^T L$ 的非奇异性会减弱,计算精度降低。图 2~图 4 给出了不同高度下,三维密度模型计算的全球密度与 MCD 数据库的对比。

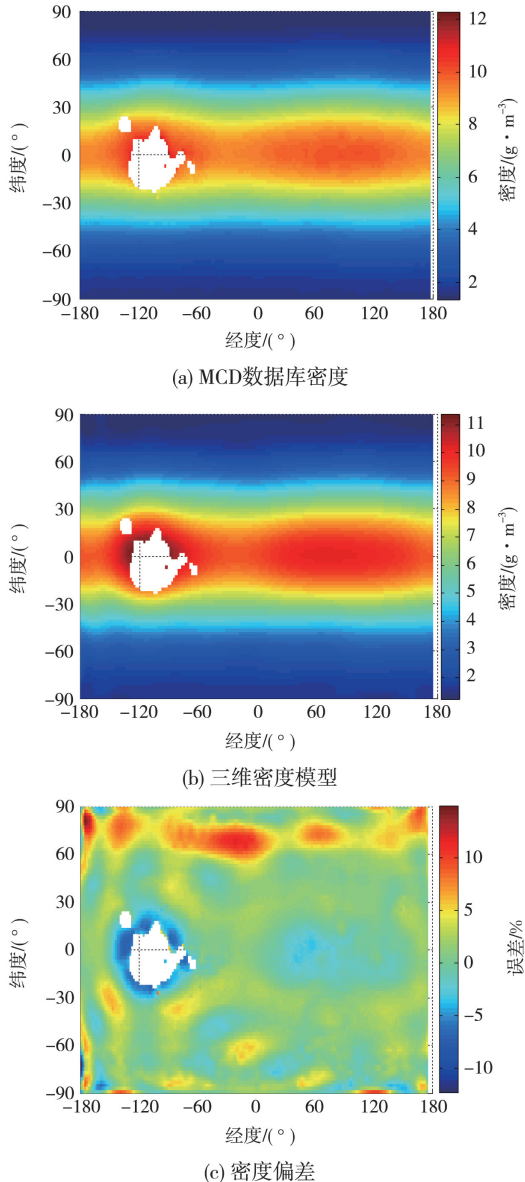


图 2 高度 30 km 处火星全球大气密度对比

Fig. 2 The Mars global atmospheric density comparison at the height of 30 km

图 2 中的空白区域表示此处受地形遮挡,没有大气。通过图 2~图 4 可以看出,在同一参考高度上,低纬度地区密度大,高纬度地区密度小,且差

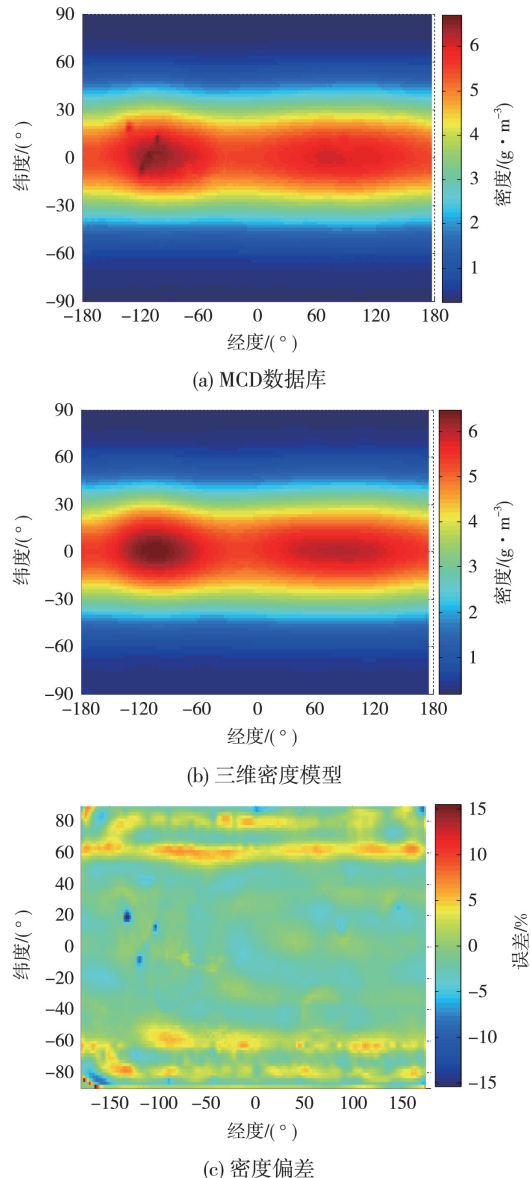


图 3 高度 60 km 处火星全球大气密度对比

Fig. 3 The Mars global atmospheric density comparison at the height of 60 km

异较大。若采用一维指数模型,必然会出现较大的误差。从对比分析结果可以看出,数据拟合得到的三维密度模型与 MCD 数据库相比,密度值近似相同,三维模型较精确地反应了数据库的密度特征,且密度误差在合理范围内,体现了三维密度模型的有效性。

表 2 给出了三维密度模型相比 MCD 数据库以及传统指数模型相对 MCD 数据库的误差统计特性。通过三维密度模型计算得到的空间节点密度数据与 MCD 数据库中的数据相比,误差小于 50% 的占到 90.08%,而采用传统指数模型时,此比例仅为 38.46%,说明三维密度模型更接近大气数据库。

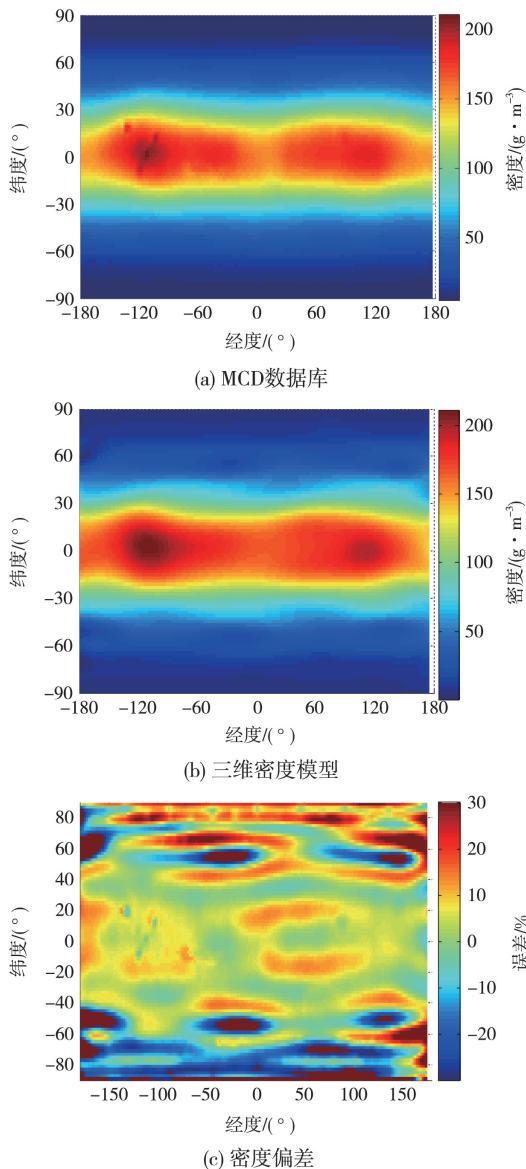


图 4 高度 90 km 处火星全球大气密度对比

Fig. 4 The Mars global atmospheric density comparison at the height of 90 km

表 2 三维密度模型与 MCD 数据库相比及传统指数模型与 MCD 数据库相比的误差统计特性

Table 2 The error statistic characteristics obtained from the comparison between the MCD database and the traditional exponential model and the comparison between the MCD database and the 3-D density model

与 MCD 数据相比的误差范围	三维密度模型	传统指数模型
<10	74.59	10.12
<20	82.50	24.10
<50	90.08	38.46

地面实时仿真对大气模型的计算量和调用时间有严格要求,表 3 给出了使用不同方式计算一个点

的大气密度所需的时间以及各模型存储量的大小。计算环境为 Matlab2007。处理器类型为 Intel(R) Core(TM)2 Quad CPU Q9550 @ 2.83 GHz,内存 4 G,系统为 Windows7 32 位操作系统。表 3 中,三维数据插值是指先通过大气数据库输出空间节点密度数据,再利用这组数据进行三维插值得到某一空间点的密度;二维插值的方式是指先通过数据拟合得到所有经纬度节点的参考高度和参考密度,利用这两组数据进行二维插值得到某一点的参考高度和参考密度,再利用指数模型得到密度;传统指数模型仅仅指表 1 中的模型 2。

由于传统指数模型形式简单,因此其实时性最优越,且不需要事先存储数据,然而 3.1 小节分析已经指出,该模型精度低,误差大。尽管 MCD 数据库能详细地反应火星大气密度的分布,但其调用时间长,难以满足实时仿真的需求,且由于该数据库包含了大量的在导航制导仿真中无用的数据,因此会占据极大的存储空间。数据插值方式的计算时间相比 MCD 数据库明显减少,但仍然会占用较大的存储空间。本文建立的三维密度模型在实时性上仅次于传统指数模型,计算一次密度所需时间约为 2×10^{-4} s,满足实时性需求。在使用该模型时,只需事先存储多项式的系数即可,占用的存储空间较小。

表 3 不同模型的计算时间及存储量对比

Table 3 The comparison of the calculation time and required storage of different models

密度计算方式	时间/s	存储量
MCD 数据库	1	大
三维数据插值	$1e-2$	大
二维数据插值	$5e-3$	较大
三维密度模型	$2e-4$	较小
传统指数模型	$3e-6$	无

3 结论

本文基于火星大气数据库,通过数据拟合的方法,建立了以高度和经纬度为输入的新型火星大气三维密度模型。该三维模型在高层上采用分层指数函数,将高于火星参考半径 $0 \sim 147$ km 的高度分为 5 层,使得每个高度层内密度随高度的变化呈现出明显的指数规律。为体现密度在水平方向上的变化,将每一个高度层的参考密度和参考高度视为经纬度的多项式函数,并通过最小二乘拟合得到多项式的系数。三维密度模型与 MCD 数据库相比误差较小,证明了数据拟合的有效性。同时,三维密度模型具有解析表达式,计算量少,存储空间较小,适用

于地面实时仿真。

致谢

本文密度数据来自 MCD4.3 数据库,由欧洲火星气候数据库研究团队提供,在此致以感谢。

参 考 文 献

- [1] Justus H L, Justus C G. Mars global reference atmospheric model (Mars-GRAM 2005) applications for Mars science laboratory mission site selection process [C]//Seventh International Conference on Mars. Pasadena, California:[s. n.],2007.
- [2] Justus C G. Mars global reference atmospheric model for mission planning and analysis[J]. Journal of Spacecraft and Rockets, 1991,28(2):216-221.
- [3] Read P L, Collins M, Forget F, et al. A GCM climate database for Mars: for mission planning and for scientific studies [J]. Advances in Space Research, 1997, 19(8): 1213-1222.
- [4] Millour E, Forget F, González-Galindo F, et al. The latest (version 4.3) Mars climate database[J]. Mars Atmosphere, Modeling and Observations, 2008;1-4.
- [5] Haberle R M, Pollack J B, Barnes J R, et al. Mars atmospheric dynamics as simulated by the NASA ames general circulation model; 1. the zonal-mean circulation[J]. Journal of Geophysical Research: Planets (1991-2012), 1993,98(E2):3093-3123.
- [6] Bougher S W, Dickinson R E, Roble R G, et al. Mars thermospheric general circulation mole: calculations for the arrival of phobos at Mars[J]. Geophysical Research Letters, 1988,15(3):1511-1514.
- [7] Millour, E, Forget, F. Mars climate database version 4.3 validation document [EB/OL]. [2014-05-01] http://www-mars.lmd.jussieu.fr/marsinfo_web.
- [8] Justus C G, Duvall A, Keller V W. Validation of Mars global reference atmospheric model (Mars-GRAM 2001) and planned new features[J]. Advances in Space Research, 2006,38(11):2633-2638.
- [9] Mooij E, Huot J P, Ortega G. Entry trajectory simulation using ESA Mars climate database version 4.1[C]//AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference and Exhibit. Kesstone, Colorado:[s. n.],2006.
- [10] Benito J, Mease K. Characterizing the controllable entry states and reachable sites for planetary landing[C]//2008. 6th International Planetary Probe Workshop. Atlanta, Georgia:[s. n.],2008.
- [11] Ushijima M, Hara H, Muramatsu A, et al. The operating characteristics of a ducted rocket in the Mars atmosphere [J]. AIAA paper, 2010, 6999.
- [12] Levesque J F, Lafontaine J. Innovative navigation schemes for state and parameter estimation during Mars entry [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2007,30(1): 169-184.
- [13] Li S, Peng Y. Radion beacons/IMU integrated navigation for Mars entry[J]. Advances in Space Research, 2011,47(7): 1265-1279.
- [14] Mars climate database: the web interface[EB/OL]. [2014-05-01]. http://www-mars.lmd.jussieu.fr/mcd_python/

作者简介:

秦同(1989—),博士研究生,研究方向为火星软着陆自主导航、制导与控制

通信地址:北京市海淀区中关村南大街5号北京理工大学宇航学院22号信箱

电话:010-68918910

E-mail:phd.qintong@gmail.com

[责任编辑:高莎]