

有偏分布下的 VaR 估计方法研究

马兴杰

(天津大学 管理学院, 天津 300072)

摘要: 文章利用 GARCHS 模型对金融时间序列的条件偏度进行动态建模,在此基础上提出了有偏分布下 VaR 的估计方法。通过沪铜期货的实证结果表明,沪铜期货收益的条件偏度时变特征明显,其收益存在明显的有偏特征。对沪铜期货 VaR 估计的 Kupiec 检验比较表明,基于 GARCHS 模型的 VaR 估计方法能够提高有偏分布下 VaR 的估计精度。

关键词: VaR; GARCHS 模型; 条件偏度; Kupiec 检验

中图分类号: F224.5

文献标识码: A

文章编号: 1009-3370 (2008) 05-0075-03

一、引言

金融资产的收益分布特征是所有金融模型的核心内容,有关收益的波动行为及其分布特征的精确描述对于金融市场的风险测度和风险管理而言更是具有重要意义的关键问题。目前,经常使用的方差和 Risk-metrics 的 VaR 等市场风险测度方法多是建立在正态分布假设的基础之上^[1]。然而,不容忽视的是,实际市场的收益分布普遍展示出的“有偏”特征对 EMH 的正态分布假说提出了置疑,同时也对现有的市场风险测度技术提出了严峻的挑战。这也就是说,当实际市场的资产收益不满足(条件或非条件)正态分布假设时,方差以及 Risk-metrics 的 VaR 等风险测度指标的准确程度都将大大降低^[2]。这迫使人们在对收益序列建模时不得不考虑偏度的存在。

早期的关于收益偏度的研究都是静态地处理收益序列的偏度,直到 Harvey(1999)基于非中心 t 分布提出了自回归条件波动、偏度模型(GARCHS)用于同时描述时间序列二阶矩和三阶矩的动态特征^[3]。国内刘庆富(2006)^[4]、魏宇(2007)^[5]等对收益分布的非对称特征及其相应的 VaR 估计方法进行了研究,但是上述研究仅仅是在 GARCHS 模型的基础上,而并未对收益的高阶矩进行动态的建模。

因此,本文在使用 GARCHS 模型对条件偏度进行动态建模,提出了有偏分布下 VaR 的估计方法。并以沪铜期货数据为样本对 VaR 进行了估计,最后通过运用 Kupiec 统计量检验^[6]对比了基于 GARCHS 模型的 VaR 估计方法与其他已有估计方法之间的精确程度。

二、研究模型

1. GARCHS 模型

Harvey(1999)基于非中心 t 分布提出了自回归条件波动、偏度模型(GARCHS),首次给出了对时间序列二阶矩和三阶矩的动态特征进行建模的框架。Harvey(1999)提出的 GARCHS 模型的具体形式如下

$$\begin{aligned} r_t &= \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1} + \varepsilon_t \\ u_t &= \varepsilon_t - \theta \varepsilon_{t-1}, u_t | I_{t-1} \sim D(0, h_t, s_t) \\ \eta_t &= h_t^{-1/2} u_t, \eta_t | I_{t-1} \sim D(0, 1, s_t) \\ h_t &= \beta_0 + \beta_1 \eta_{t-1}^2 + \beta_2 h_{t-1}^2 \\ s_t &= \gamma_0 + \gamma_1 \eta_{t-1}^3 + \gamma_2 s_{t-1}^3 \end{aligned} \quad (1)$$

模型 r_t 中是需要建模的变量,如股指收益; u_t 表示对误差项 ε_t 进行一阶平滑消除自相关性后的残差; h_t 表示 u_t 的条件方差, $\eta_t = h_t^{-1/2} u_t$ 表示标准化误差; s_t 表示 η_t 的条件偏度, $D(\cdot)$ 表示包含偏度的任意分布。

为保证条件方差过程和条件峰度过程是正定的,同时保证条件方差、条件偏度和峰度是非扩散的,需要加上限制条件: $\beta_0 \geq 0, 0 < \beta_1 < 1, 0 < \beta_2 < 1, -1 < \gamma_2 < 1; \beta_1 + \beta_2 < 1, -1 < \gamma_1 + \gamma_2 < 1$ 。

2. 模型的参数估计

在对模型进行参数估计时,需要对分布 $D(\cdot)$ 做出相应的假定。可以使用正态密度函数的 Gram-Charlier 展开并且在三阶矩的时候截断,在信息集 I_{t-1} 下,可以得到标准化误差 $\eta_t = h_t^{-1/2} u_t$ 的条件密度的近似表达式

收稿日期: 2008-03-04

作者简介: 马兴杰(1973—),男,博士研究生,研究方向为技术经济与管理。E-mail: hawk_2002@163.com

$$f(\eta_t | I_{t-1}) = \frac{\phi(\eta_t) \psi^2(\eta_t)}{\Gamma_t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\eta_t^2}{2}} \frac{\left(1 + \frac{S_t}{3!} (\eta_t^3 - 3\eta_t)\right)^2}{1 + \frac{S_t^2}{3!}} \quad (2)$$

其中, $\phi(\eta_t)$ 为标准正态分布的概率密度函数, $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\eta_t^2}{2}}$, $\psi(\eta_t)$ 为 Gram-Charlier 展开的多项式部分, 为 Gram-Charlier 展开的修正项。

由 $\eta_t = h_t e^{-1/2} u_t$, 可以得到 u_t 的近似条件密度为 $h_t^{-1/2} f(\eta_t | I_{t-1})$, 从而可以得到 ε_t 的样本似然函数为

$$SLF(u_t, t=1, \dots, T | I_{t-1}, \Theta) = -\frac{T}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln h_t - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln \eta_t^2 + \sum_{t=1}^T \ln(\psi^2(\eta_t)) - \sum_{t=1}^T \ln \Gamma_t \quad (3)$$

通过对样本似然函数进行极大化求解, 可以得到参数向量 Θ 的估计, 从而可以同时得到条件均值方程、条件方差方程、条件偏度方程的参数估计结果, 从而实现高阶条件波动率的估计。

三、研究数据及描述

上海铜期货市场经过 10 几年的规范运作, 已经具备了全球铜价的“定价话语权”, 被公认为全球三大铜交易中心之一, 为中国铜行业提供了有效的规避国际市场价格风险的手段, 占全国近 80% 产量的铜生产企业和贸易商都参与了铜期货交易。因此, 本文以上海期货交易所, 1998 年 3 月 15 日至 2007 年 9 月 28 日的铜期货日收盘价作为研究样本, 样本总数为 2 300, 所有的数据均取自于 Bloomberg。

表 1 数据统计特性

	均值	方差	偏度	J-B
沪铜	0.000 59	0.013 4	-0.42	1 076.4**

说明: * 和 ** 分别代表在 5% 和 1% 水平下显著

从表 1 的描述性统计可以看到, 铜期货的 Jarque-Bera 检验都非常显著, 说明铜期货不服从有效市场假说的正态分布假定。铜期货的收益率呈现明显的左偏特征, 因此在对其收益分布进行刻画时, 有必要考虑其偏度的影响。

四、模型估计结果

使用基于 Gram-Charlier 序列展开的伪极大似然估计方法, 对模型(1)的参数进行估计, 具体计算通过 matlab 编程实现。模型参数估计结果见表 2。

表 2 GARCHS 模型估计结果

	参数	t 统计量
α_1	-0.000 9**	-4.64
α_2	0.045 73	-1.88
θ	0.086 4**	6.47
β_1	2.132e-5**	4.80
β_2	0.029 5**	55.59
β_3	0.766**	38.44
γ_1	-0.006 4	-0.35
γ_2	0.067 7**	6.68
γ_3	-0.644 4**	-5.48
Log-likelihood	6 780.737	

说明: * 和 ** 分别代表在 5% 和 1% 水平下显著

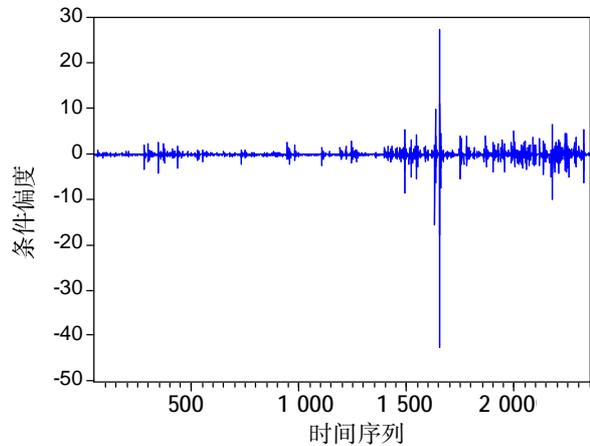


图 1 沪铜期货条件偏度估计值

从表 2 的估计结果可以看出, 样本指数的条件方差, 条件偏度的估计系数都显著。这表明, 样本指数收益的条件方差, 条件偏度存在时变性和持续性。从图 1 也可以看出沪铜期货的条件偏度存在显著的时变特性。因此, 动态地考虑指数收益分布的条件偏度的变化对于刻画收益的风险特性是必要的。

五、基于 GARCHS 模型的 VaR 计算及 Kupiec 检验

1. VaR 的计算

显著性水平为 p 的 VaR 可以通过下式定义

$$\Pr(r_t \leq VaR_t | \Omega) = \int_{-\infty}^{VaR_t} f(r_t | \Omega) dr_t = p$$

其中, $f(r_t | \Omega)$ 是 r_t 的条件概率密度函数。上式可以用标准化回报表示如下

$$\begin{aligned} \Pr(r_t \leq VaR_t | \Omega_t) &= \Pr\left(\frac{(r_t - \mu_t)}{\sigma_t} \leq \frac{(VaR_t - \mu_t)}{\sigma_t} | \Omega_t\right) \\ &= \Pr\left(z_t \leq z_p = \frac{(VaR_t - \mu_t)}{\sigma_t} | \Omega_t\right) = \int_{-\infty}^{z_p} f(z_t) dz_t = p \end{aligned}$$

因此只要计算出 $f(z_t)$ 的 p 分位数 z_p 就可以计算出 $VaR_t = \mu_t + z_p \sigma_t$, 其中条件均值 $\mu_t = \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1} + \theta \varepsilon_{t-1}$ 。而只要知道 $f(z_t)$ 的分布, 其分位数 z_p 可以通过数值方法计算得到。在 GARCHS 模型中, z_p 是偏度的函数。

2. Kupiec 检验

Kupiec 统计检验量方法(Kupiec, 1995)是目前金融机构中应用非常广泛的一种回顾测试检验方法。为了进行 VaR 的 Kupiec 检验, 首先需要定义以下的“碰撞序列”(Hit sequence)

$$Hit_t = \begin{cases} 1 & r_t < -VaR_t \\ 0 & r_t \geq -VaR_t \end{cases}$$

它表示的是, 如果 t 时刻的实际收益率超出所估计的 t 时刻的 VaR 的话, 那么该序列 t 时刻的取值为 1, 否则为 0。如果用于计算显著性水平 p 的 VaR 的收益分布模型是正确的话, 则该“碰撞序列”应该服从概率为 p 的贝努利(Bernoulli)分布, 即可以定义如下零假设:

$H_0: Hit \sim \text{Bernoulli}(p)$

依据概率论知识, 可以写出一个 Bernoulli(p) 分布的似然函数

$$L(p) = \prod_{t=1}^T (1-p)^{1-Hit_t} p^{Hit_t} = (1-p)^{T_0} p^{T_1}$$

式中: T 为碰撞序列总长度; T_1 是序列当中取值为 1 的发生个数总和; T_0 是序列当中取值为 0 的发生个数总和。有研究表明, 如果上面的零假设是正确的话, 则可以证明以下的似然比 LR 满足

$$LR = -21n \frac{(1-p)^{T_0} p^{T_1}}{\left(1 - \frac{T_1}{T}\right)^{T_0} \left(\frac{T_1}{T}\right)^{T_1}} \sim \chi^2(1)$$

这也就是说, 在显著性水平 p 下, 如果所计算的 LR 检验值大于该显著性水平下自由度为 1 的 χ^2 分布的临界值的话, 则应拒绝原假设 H_0 ; 反之, 则应该接受原假设, 即认为所采用的收益分布模型是足够准确的。进一步讲, 为了定量比较不同收益分布模型的精确度, 在考虑拒绝还是接受原假设时, 采用的定量判断标准是对比相应 Kupiec 检验的 p 值。即, 如果对某一收益分布模型 VaR 的 Kupiec 检验的 p 值越大, 则说明越不能拒绝原假设 H_0 , 即表明该收益分布模型的精确度越高。

本文使用 GARCHS 模型、 t 分布 GARCH

表 3 VaR 的 Kupiec 检验结果

	GARCHSK	GARCH-T	GARCH
N(1%)	28(22)	10(22)	36(22)
LR	0.19(0.66)	11.72(0.00)**	4.33(0.04)*
N(5%)	129(120)	77(120)	129(120)
LR	0.26(0.68)	22.23(0.00)**	0.14(0.70)
N(10%)	253(220)	181(220)	224(220)
LR	0.20(0.65)	23.00(0.00)**	0.30(0.58)

注: * 和 ** 分别代表在 5% 和 1% 水平下显著, 其中 N(p %) 所在行表示 p % 的显著性水平 VaR 计算结果的失败次数, () 中期望失败次数。LR 所在行表示的是 LR 统计量, () 中的数值为统计量的 p 值。

(GARCH-T) 模型和正态 GARCH 模型对上述样本指数的 VaR 值进行了计算, 并进行了后验比较。其中 Kupiec 检验的结果如表 3 所示。

从表 3 的检验结果可以看出, 正态 GARCH 模型在高显著水平下(1%)容易低估市场风险, 对沪铜期货的检验结果拒绝了正态 GARCH 在 1% 的显著性水平下的计算结果。而 GARCH-T 模型的 VaR 计算结果容易高估市场风险, 使用 GARCH-T 模型计算的 VaR 的失败率都要低于相应的显著水平下的期望失败率, 这可能与学生 T 分布无法考虑受益分布的非对称性有关。和这两者相比, GARCHS 模型估计的 VaR 在更个显著性水平上的检验结果都几乎不能显著拒绝, 这表明考虑了收益的偏度后, 能更好地刻画收益的非对称特性, 因而能更好地刻画市场的风险特性。

六、小 结

本文提出了 GARCHS 模型来对金融时间序列的条件偏度进行动态建模, 并利用估计的条件偏度量金融时间序列的有偏分布, 用于改进 VaR 的估计。通过沪铜期货的实证结果表明, 沪铜期货收益的条件偏度时变特征明显, 其收益存在明显的有偏特征。Kupiec 检验表明, 基于 GARCHS 模型的 VaR 估计方法能够提高有偏分布下 VaR 的估计精度。

(下转第 81 页)

参考文献:

- [1] 侯光明,李存金. 现代管理激励与约束机制[M]. 北京:高等教育出版社,2002.
- [2] 煜辉,欧明刚. 基金激励合约的经济学分析[J]. 数量经济技术经济研究, 2003(10):68-75.
- [3] 王文举,夏龙梅. 保险人行为博弈分析[J]. 数量经济技术经济研究, 2003(8):46-54.
- [4] 李维芳. 浅议国有企业经营者激励约束机制[J]. 经济师, 2005(2):41-47.
- [5] 张维迎. 博弈论与信息经济学[M]. 上海:上海三联书店,1996.
- [6] 吴新博. 信息不对称条件下委托代理关系的主要问题[J]. 北京师范大学学报, 2005(5):112-116.
- [7] 尚耀华. 国有企业激励约束机制问题探讨[J]. 经济师, 2005(9):23-27.
- [8] 胡祖光. 不对称信息博弈中的委托人对策[J]. 数量经济技术经济研究, 2000(9):81-89.
- [9] 李维芳. 浅议国有企业经营者激励约束机制[J]. 经济师, 2005(2):41-47.
- [10] 岳中志. 非对称信息条件下的企业经营者激励契约设计[J]. 数量经济技术经济研究, 2005(2):50-55.

Optimal Design of Inspiration Mechanism under Symmetrical and Asymmetrical Information Conditions

ZHANG Qian-rong

(School of Statistics, Central University of Finance and Economics, Beijing 100081)

Abstract: Because of information problems, the agent can not observe how hard the client works, so he needs to motivate and supervise the client of his corporation. This paper attempts to put the operating standard coefficient and manufacturing cost coefficient into the optimal excitation mechanism model, in order to get the corresponding optimal motivating coefficient and know how hard the client works, through the design and calculation of the model. This paper analyzes all kinds of affecting elements and finally, offers some strategies of how to improve the relationship between agents and clients.

Key words: agreement; excitation mechanism; optimization

[责任编辑:孟青]

(上接第 77 页)

参考文献:

- [1] Morgan J P. RiskMetrics technical document [M]. 4th ed. New York: J P Morgan, 1996.
- [2] Bouchaud J P, Potters M. Theory of financial risk: from statistical physics to risk management [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.
- [3] Harvey C R, Siddique A. Autoregressive conditional skewness [J]. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 1999(34): 487.
- [4] 刘庆富, 仲伟俊. 基于 VaR-GARCH 模型族的我国期铜市场风险度量研究[J]. 系统工程学报, 2006(4): 429-433.
- [5] 魏宇. 有偏胖尾分布下的金融市场风险测度方法[J]. 系统管理学报, 2007(6): 243-250.
- [6] Kupiec P H. Techniques for verifying the accuracy of risk measurement models [J]. Journal of Derivatives, 2005(3): 73-84.

Study on the Estimation method of VaR Based on Skewed Distribution

MA Xing-Jie

(School of Management, Tianjin University, 300072)

Abstract: This paper uses GRACHS model to carry out a dynamic modeling for finance time series, and based on this, puts forward the estimation method of VaR under skewed distribution. The empirical results of Shanghai copper futures markets suggest that, the benefits of Shanghai copper futures are time varying significantly and have obvious skewed distribution. The Kupiec test comparison of estimation for VaR of Shanghai copper futures shows that, the Estimation method of VaR based on the GARCHS model can improve the estimation accuracy for VaR under skewed distribution.

Key words: VaR; GARCHS model; conditional skewness; kupiec test

[责任编辑:孟青]